

論文題目	Dynamics of a Flexible Beam with Active Nonlinear Magnetic Force	論文番号		12		
		著者	Chyuan-Yow Tseng and Pi-Cheng Tung (Oriental Institute of Technology, Taipei, Taiwan)	出典		
ASME, VA 120(1),1998 39-46						
図	表			式	文献	
Key Words	Beam, Nonlinear Magnetic Force, Control, Stability, Bifurcation, Center Manifold, Melnikov function	抄録	北海道大学			
			小林 幸徳			

**Abstract** A simply supported beam is controlled in a contactless manner by the attractive force of magnetic actuators that are controlled by feedback signals from displacement and velocity sensors to stabilize the levitation. The equations of motion for the single mode of a beam's model are used to show that due to the realistic nonlinear terms existing in the magnetic force, the resulting third-order system exhibits codimension-two bifurcations in which a limit cycle and a heteroclinic orbit are created. Using the bifurcation analysis, it was determined how feedback gains influenced the behavior of transverse vibrations of the beam and the feedback gains producing stability were found. The largest region of attraction of those stable regions is showed to exist at certain feedback gain combination. The analytical approach based on the single mode simplification system was proven to be feasible via the numerical simulation of the governing nonlinear PDE. According to the results of the analysis, due to the nonlinear magnetic force, feedback gains for the system must be selected carefully.

## 1. Introduction

柔軟構造物の振動を非接触で制御するために磁力が広く用いられており、磁気軸受や磁気サスペンションに関する研究などが多数行われている。しかし、実際の磁力は非線形関数であるにもかかわらず、ほとんどの研究では、線形モデルと線形状態フィードバックによる制御を行っている。

本論文では、両端単純支持はりの磁力による振動制御を扱う。磁力の非線形性を考慮して支配方程式を導出し、中心多様体理論を適用して、低次元化する。そして、分岐解析を行ってフィードバックゲインとはりの安定性の関係を明かにする。

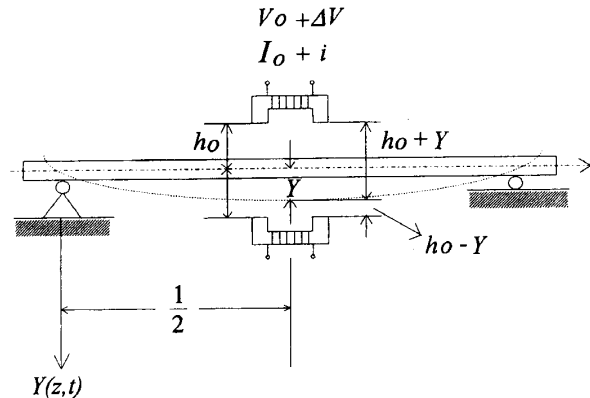


Fig. 1 A schematic diagram of the physical system

## 2. Formulation of Problem

図1は単位長さの両端単純支持はりを示す。はりの中央に二つの電磁石がはりとの距離  $h_0$  に設置されている。はりの運動方程式は(Oshinoya et al., 1992)

$$M \frac{\partial^2 Y(z, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial Y(z, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 Y(z, t)}{\partial z^4} = f_m(Y, \dot{Y}) \delta(z - \frac{1}{2}). \quad (3)$$

また、電磁力は(Knight et al., 1992)

$$f_m = \frac{\mu_0 N^2 S}{8} \left[ \frac{(I_0 - 0.5i)^2}{(h_0 - Y)^2} - \frac{(I_0 + 0.5i)^2}{(h_0 + Y)^2} \right]. \quad (4)$$

であり、電流と電圧は次式で与えられる。

$$L \frac{di}{dt} + iR = \Delta V. \quad (5)$$

$$\Delta V = K_p Y \delta(z - \frac{1}{2}) + K_d \dot{Y} \delta(z - \frac{1}{2}), \quad (6)$$

ここで、 $\mu_0$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $I_0$  は透磁率、コイルの巻数、面積、バイアス電流であり、 $K_p$  と  $K_d$  はゲイン、 $R$  と  $L$  は抵抗とインダクタンスである。以下の無次元量

$$\varphi = \frac{Y}{h_0}, \quad \omega = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{M}}, \quad \tau = \omega t, \quad \sigma = \frac{N^2 \mu_0 S I_0^2}{4 \omega^2 M h_0^3},$$

$$\xi = \frac{c}{2M\omega}, \quad u = \frac{i}{I_0}, \quad \alpha = \frac{R}{\omega L}, \quad c_k = \frac{K_p h_0}{I_0 R}, \quad c_d = \frac{K_d h_0 \omega}{I_0 R}, \quad (7)$$

を導入し、式(4)を(3)に、式(6)を(5)に代入すると

$$\ddot{\varphi} + 2\xi \dot{\varphi} + \frac{1}{\pi^4} \varphi'''' = \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{(1 - 0.5u)^2}{(1 - \varphi)^2} - \frac{(1 + 0.5u)^2}{(1 + \varphi)^2} \right] \delta\left(z - \frac{1}{2}\right), \quad (8)$$

$$\dot{u} = \alpha [c_k \varphi \delta(z - \frac{1}{2}) + c_d \dot{\varphi} \delta(z - \frac{1}{2}) - u], \quad (9)$$

が導かれる。

変位を

$$\varphi(z, \tau) = \sum_{j=1}^n x_j(\tau) \sin(n\pi z), \quad (10)$$

と仮定し、ガラーキン法を適用し、1項近似すると

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \sigma \left[ \frac{(1-0.5u)^2}{(1-x)^2} - \frac{(1+0.5u)^2}{(1+x)^2} \right], \quad (11)$$

$$\dot{u} = \alpha(c_k x + c_d \dot{x} - u). \quad (12)$$

を得る。この低次元化によりスピルオーバーが予測されるが、中央加振していることから少なくとも偶数次モードは発生しないので、定性的特性の解析には問題無い。

変数を次式のように書き変えると

$$\begin{aligned} ((x, \dot{x}, u) &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, x_3)) \\ x_1 &= x_2 \end{aligned} \quad (13a)$$

式(11)と(12)は

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\alpha x_1 - 2\xi x_2 \\ &+ \sigma \left[ \left( \frac{1-0.5x_3}{1-x_1} \right)^2 - \left( \frac{1+0.5x_3}{1+x_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\dot{x}_3 = \alpha(c_k x_1 + c_d x_2 - x_3) \quad (13c)$$

or

$$\dot{X} = [A]X + g(X), \quad (14)$$

と書き直される。ここで、[A]は平衡点まわりで線形化されたシステムのヤコビ行列である。

### 3. Local Bifurcations of Codimension Two

式(13)を平衡点まわりで展開すると

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -(1-4\sigma)x_1 - 2\xi x_2 - 2\sigma x_3 + 8\sigma x_1^3 \\ &- 6\sigma x_1^2 x_3 + \sigma x_1 x_3^2 + O(4) \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha(x_3 - c_k x_1 - c_d x_2), \quad (15c)$$

ヤコビ行列は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+4\sigma & -2\xi & -2\sigma \\ \alpha c_k & \alpha c_d & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (16)$$

であり、

$$(c_k, c_d) = \left( \frac{4\sigma-1}{2\sigma}, \frac{4\sigma-1}{2\alpha\sigma} - \frac{\xi}{\sigma} \right), \quad (17)$$

のとき、二つのゼロと一つの負の実固有値を持つ。これは、いわゆる "double zero" codimension two 分岐問題である。ここで、codimension とは分岐を有する系の最小次元である。

3次元系(15)を中心多様体上の2次元サブシステムに変換する。まず、変数  $x=(x_1, x_2, x_3)$  をヤコビ行列(16)の固有ベクトルからなるモード行列  $T$  を用いて変数  $y=(y_1, y_2, y_3)$  に変換する。 ( $x=Ty$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\alpha+2\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-4\sigma}{4\sigma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ f(Ty) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

where

$$T = \begin{bmatrix} \frac{-2\sigma}{1+a^2-4\sigma+2\alpha\xi} & \frac{2\sigma}{4\sigma-1} & \frac{\xi}{1-4\sigma} \\ \frac{2\sigma(\alpha+2\xi)}{1+a^2-4\sigma+2\alpha\xi} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ここで  $f(\cdot)$  は式(15)の非線形項からなる関数である。

中心多様体理論によれば、中心多様体は単に平面  $y_1=0$  であり、中心多様体上の低次元化システムは

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-4\sigma}{4\sigma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 y_2^3 + c_2 y_2^2 y_3 + c_3 y_2 y_3^2 + c_4 y_3^3 \\ c_5 y_2^3 + c_6 y_2^2 y_3 + c_7 y_2 y_3^2 + c_8 y_3^3 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

となる。分岐点近傍の挙動を調べるために微小パラメータ  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を導入し、

$$c_k = \mu_1 + c_{ke}, \quad c_d = \mu_2 + c_{de}$$

とすると式(20)より、

$$\dot{w}_1 = \tilde{c} w_2 \quad (21a)$$

$$\dot{w}_2 = k_1 w_1 + k_2 w_2 + b_1 w_1^3 + b_2 w_1^2 w_2, \quad (21b)$$

が導かれる。ここで、 $c=(1-4\sigma)/4$  である。また係数は付録に与えられる。

$w_1=w_2=0$  のとき原点は平衡点となり、さらに  $\mu_1 > 0$  のとき、次の二つの平衡点も存在する。

$$w_{\pm} = \left( \pm \sqrt{\frac{-k_1}{b_1}}, 0 \right) = \left( \pm \sqrt{\frac{2(4\sigma-1)^2}{1+4\sigma}} \mu_1, 0 \right).$$

これら三つの平衡点付近の位相幾何学的特徴はヤコビ行列

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{c} \\ k_1 + 3b_1 \bar{w}_1^2 & k_2 + b_2 \bar{w}_1^2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

の固有値によって決まる。 $w_1=w_2=w$  のとき、式(22)は異符号の2実固有値を持ち、これらはサドルポイントである。さらに  $w_1=w_2=0$  のとき

$$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{c} \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

であり、

$$\mu_1 = (\alpha+2\xi)\mu_2, \quad \tilde{c}k_1 < 0. \quad (24)$$

はHopf分岐が発生する境界線を示す。Hopf分岐線によって分けられる領域間の遷移は、Hopf分岐だけでは

完全に説明できず, Heteroclinic 分岐の発生が予想される. ここで, 微小パラメータ  $\epsilon$  を導入し,

$w_1 = u, w_2 = \epsilon v, k_1 = \epsilon^2 v_1, k_2 = \epsilon^2 v_2, t = \epsilon t$  と置いて式(21)に代入して, の 1 次の項を整理すると

$$\dot{u} = \epsilon v \quad (25a)$$

$$\dot{v} = \frac{v_1}{\epsilon} u + \epsilon v_2 v + \frac{b_1}{\epsilon} u^3 + \epsilon b_2 u^2 v. \quad (25b)$$

を得る.  $\epsilon=0$  のとき, このシステムはハミルトン関数

$$H = \frac{1}{4} \left( 2\epsilon v^2 - 2 \frac{v_1}{\epsilon} u^2 - \frac{b_1}{\epsilon} u^4 \right). \quad (26)$$

を有するハミルトン系である. さらに  $v_1 = -b_1$  のとき式(25)は 1 組のサドルポイント  $(\pm 1, 0)$  を持つ. 解曲線上の点  $(u_0, v_0)$  は次式で与えられる.

$$u_0 = \tanh \left( \sqrt{\frac{b_1}{2\epsilon^2}} t \right), \quad v_0 = \sqrt{\frac{b_1}{2\epsilon^2}} \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{b_1}{2\epsilon^2}} t \right). \quad (27)$$

これらの曲線は二つのサドルポイントで交差し, heteroclinic 軌道と呼ばれる.

システム(25)が摂動されるともはやハミルトン系ではなくなるが, ある  $v_1$  と  $v_2$  の値でサドル交差が起こり得る. このとき Melnikov の方法によれば,  $v_2$  は次式を満たさなければならない.

$$M(v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon v_0 (v_2 v_0 + b_2 u_0^2 v_0) dt = 0, \quad (28)$$

ここで,  $M(\cdot)$  は Melnikov 関数である. 式(27)を用いれば, 式(28)は

$$k_2 = \frac{b_2}{5b_1} k_1. \quad (29)$$

となり, 最終的に次式が導かれる.

$$\mu_2 = \frac{(5\alpha + 6\xi + 4\alpha^2\xi + 8\alpha\xi^2 + 20\alpha\sigma + 24\xi\sigma + 8\alpha^2\sigma\xi + 16\alpha\xi^2\sigma)\mu_1}{5\alpha(\alpha + 2\xi)(1 + 4\sigma)} \quad (30)$$

式(30)は heteroclinic 軌道上のサドル交差分岐曲線を定義する.

図 2 は平衡点の安定性と式(24)と(30)で与えられる局所分岐の分岐図で, 以下の境界で幾つかの領域に分けられる.

- Supercritical Pitchfork (P+)
- Subcritical Pitchfork (P-)
- Hopf (Ho)
- Saddle Connection (SC)

領域  $\cdot$ : 安定平衡点は存在しない. (制御不可能)

領域 a: 不安定なリミットサイクルがフィードバックゲインの増加とともに成長する. SC 曲線に到達すると, リミットサイクルはサドルポイントに達し, サドル交差分岐は破壊される.

領域 b: リミットサイクルは生じず, 平衡点は沈点.

以上のことから, フィードバックゲインを  $a$  と  $b$  の領域に選べば, はりの応答は安定である.

パラメータ に関しては, 式(17)から以下のことが分かる.

- (1)  $(c_k, c_d)$  空間で  $\epsilon < 0.25$  のとき第 3 象限の分岐点は増加すると敏感に原点方向に動く. また,  $\epsilon > 0.25$  のとき, はりは座屈し, 分岐は第 1 象限にジャンプして  $\epsilon$  の変化に鈍くなる.
- (2)  $(\mu_1, \mu_2)$  空間において pitchfork と Hopf 分岐は  $\epsilon$  に無関係であり,  $\epsilon$  は系の定性的構造に影響を及ぼさない.

#### 4. Numerical Simulations

本論文の解析の妥当性を検証するために, 式(13)を直接数値積分して求めた位相線図を図 3 に示す. ここで,  $\epsilon = 0.125, \mu_1 = 0.125, \mu_2 = 0.125$  とした. このとき分岐点は原点  $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$  であり,  $c_k = -2, c_d = -9$  となる. Hopf 分岐は, 式(24)より

$$\mu_2 = 2\mu_1, \quad \mu_1 > 0, \quad (31)$$

サドル分岐は式(30)より

$$\mu_2 = \frac{197\mu_1}{60}, \quad \mu_1 > 0, \quad (32)$$

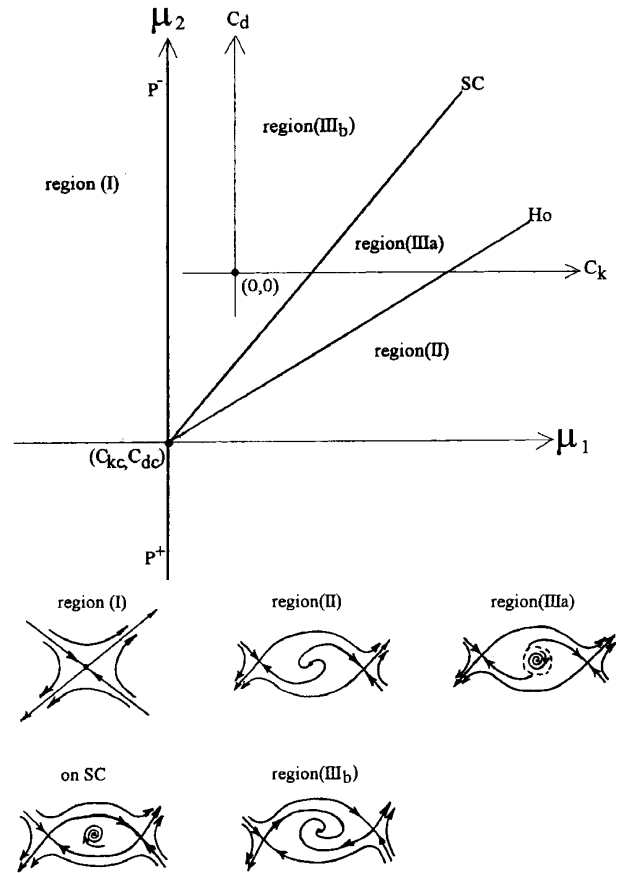


Fig. 2 Completion bifurcation sets associated with phase portraits in each region. Ho: Hopf bifurcation. P+: Supercritical pitchfork bifurcation. P-: Subcritical pitchfork bifurcation. SC: Heteroclinic bifurcation.

そして Pitchfork 分岐は

$$\mu_1 = 0. \quad (33)$$

で起こる．図2と図3は対応する領域でよく一致している．さらに式(8)と(9)を差分近似した計算も行い，妥当性を確認している．

### 5. Region of Attraction

線形フィードバック制御側で振動制御系が安定であるすべての初期条件の組を attraction 領域  $R_A$  と呼ぶ．

領域  $a$  にゲインを選ぶと，系は一つの安定平衡点  $(0,0)$ ，二つのサドルポイントと不安定なリミットサイクルを有する．このとき  $R_A$  は有界であり，その境界はリミットサイクルである．

図5は  $\mu_1, \mu_2$  を変えた場合の領域  $R_A$  の変化の様子を示す．いずれの場合も  $\mu_1, \mu_2$  の値が SC 曲線に達するとき  $R_A$  は最大となっている．

したがって 制御系で領域  $R_A$  を最大とするためには，フィードバックゲインをできるだけ SC 曲線に近づければよい．

### 抄録者所感

制御系の安定性を非線形モデルの分岐解析から調べて，ゲインの安定領域を決定する方法に関心を持った．このような解析が非線形制御の分野で一般的に行われているのかは，よく分からない．また，簡便な加振方法である電磁加振系の非線形モデルが参考になった．

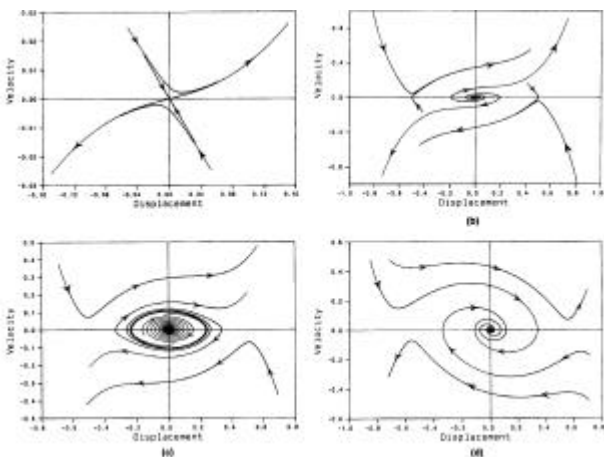


Fig.3 Phase portraits simulated from Eq (13)  
 (a) in region (I) at  $\mu_1 = -0.05$  and  $\mu_2 = 0.1$ ,  
 (b) in region (II) at  $\mu_1 = 1.66$  and  $\mu_2 = 0.5$ ,  
 (c) in region (IIIa) at  $\mu_1 = 1.66$  and  $\mu_2 = 4.0$ ,  
 (d) in region (IIIb) at  $\mu_1 = 1.57$  and  $\mu_2 = 10$ .

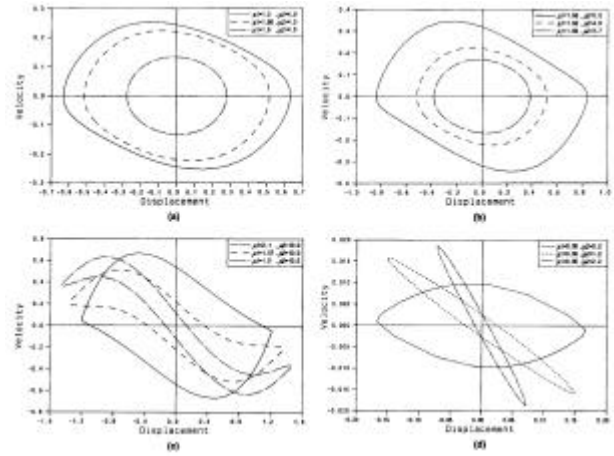


Fig.5 Evolution of region of attraction

- (a) for  $\mu_2 = 4.0$  and various values of  $\mu_1$  in region (IIIa),
- (b) for  $\mu_1 = 1.66$  and various values of  $\mu_2$  in region (IIIa),
- (c) for  $\mu_2 = 10.0$  and various values of  $\mu_1$  in region (IIIb),
- (d) for  $\mu_1 = 0.05$  and various values of  $\mu_2$  in region (IIIb).

### References

Akishita, S., Morimura, T., and Hanaguchi, S., 1990, "Vibration Control of Magnetically Suspended Flexible Rotor by the Use of Optimal Regulator," *Seiken Symposium*, Tokyo, pp. 147-174.

Bornstein, K. R., 1991, "Dynamic Load Capabilities of Active Electromagnetic Bearings," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 113, pp. 598-603.

Bibikov, Y. N., 1979, "Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations," *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, New York.

Carr, J., 1981, *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York.

Dangelmayr, G., and Guckenheimer, J., 1987, "On a Four Parameter Family of Planar Vector Fields," *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 97, pp. 321-352.

Fujita, M., Matsumura, F., and Namerikawa, T., 1990, " $\mu$ -Analysis and Synthesis of a Flexible Beam Magnetic Suspension System," *Seiken Symposium*, Tokyo, pp. 495-504.

Guckenheimer, J., and Holmes, P., 1985, *Nonlinear Oscillations Dynamical System and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.

Holmes, P. J., 1981, "Dynamics of a Nonlinear Oscillator with Feedback Control: Local Analysis," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 107, pp. 159-165.

Khalil, H. K., 1992, *Nonlinear System*, MacMillan, New York.

Knight, J. D., Xia, Z., and McCaul, E., 1992, "Determination of Forces in a Magnetic Bearing Actuator: Numerical Computation with Comparison to Experiment," *ASME Journal of Tribology*, Vol. 114, pp. 796-801.

Lee, C. W., and Kim, J. S., 1992, "Modal Testing and Suboptimal Vibration Control of Flexible Rotor Bearing System by Using a Magnetic Bearing," *ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*, Vol. 114, pp. 244-252.

Oshinoya, Y., and Shimogo, T., 1992, "Electromagnetic Levitation Control of a Traveling Steel Belt," *JSME Series III*, Vol. 35, No. 1.

Rao, Singiresu S., 1995, *Mechanical Vibration*, Addison-Wesley, New-York.

Salm, J. R., 1988, "Active Electromagnetic Suspension of an Elastic Rotor: Modeling, Control, and Experimental Results," *ASME JOURNAL OF VIBRATION, ACOUSTICS, STRESS, AND RELIABILITY IN DESIGN*, Vol. 110, pp. 493-500.

Shaw, S. W., and Wiggins, S., 1988, "Chaotic Dynamics of a Whirling Pendulum," *Physica D31*, pp. 190-211.

Shaw, S. W., 1985, "The Dynamics of a Harmonically Excited System Having Rigid Amplitude Constraints Part I: Subharmonic Motions and Local Bifurcations," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 453-458.

Youcef-Toumi, K., Reddy, S., and Vithianathanan, I., 1990, "A Digital Time Delay Controller for Active Magnetic Bearings," *2nd International Symposium on Magnetic Bearings*, July 12-14, Tokyo, Japan.

### APPENDIX

The coefficients  $k_1, k_2, b_1$ , and  $b_2$  of Eq. (21) are given as:

$$k_1 = \frac{8\alpha\sigma^2\mu_1}{(\alpha + 2\xi)(4\sigma - 1)}, \quad k_2 = \frac{2\alpha\sigma(\mu_1 - \alpha\mu_2 - 2\xi\mu_2)}{(\alpha + 2\xi)^2},$$

$$b_1 = \frac{4\alpha\sigma^2(1 + 4\sigma)}{(\alpha + 2\xi)(1 - 4\sigma)^3},$$

$$b_2 = \frac{2\xi\sigma(3 + 2\alpha^2 + 4\alpha\xi + 12\sigma + 4\alpha^2\sigma + 8\alpha\xi\sigma)}{(\alpha + 2\xi)^2(4\sigma - 1)^2}.$$