

論文題目	Effect of the Geometry on the Non-linear Vibration of Circular Cylindrical Shells	論文番号	*
著者	F. Pellicano, M. Amabili, (Universita di Parma, Italy) and M. P. Païdoussis (McGill University, Canada)	出典	NLM 37, 2002 1181–1198
Key Words	Non-linear Vibration, Circular Cylindrical Shell, Donnell Shell Theory, Effect of the Geometry	抄録	* *

### 1. 研究テーマ

最低次の振動モードに対応する調和外力が作用する薄肉円筒シェルの非線形振動の解析。シェルの厚さや長さや半径の比が非線形振動特性に及ぼす影響を明らかにする。

### 2. 研究手順

Donnellの非線形扁平シェル理論に基づく支配方程式

$$D\nabla^4 w + chw + \rho h \ddot{w} = f + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 F}{R^2 \partial \theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{R \partial x \partial \theta} \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right), \quad (1)$$

適合条件式

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right], \quad (2)$$

ここで、 $F$ は面内応力関数。Donnellの非線形シェル理論は、周方向波数 $n$ が大きく $1/n^2 \ll 1$ のときに適しており、 $n \geq 5$ で高い精度を有する。薄肉円筒シェル( $h \ll R$ )を仮定しており、面外せん断変形と回転慣性は考慮しない。

境界条件：両端単純支持

外力：周方向波数 $n$ ，軸方向半波数 $m=1$

$$f = f_n \cos(n\theta) \sin(\pi x/L) \cos(\omega t),$$

線形  $(1,n)$  モードが励振されると、2次非線形により、周方向波数 $2n$ ，軸方向半波数2および軸対称モードが連成し、3次非線形により、周方向波数 $3n$ ，軸方向半波数3の波が連成する。万全のため、対称荷重で励振されない $m$ が偶数の軸対称モードに関しても級数展開する。

- ・ 面外変位を励振(driven)と随伴(companion)の二つの非対称モードで展開
- ・ 軸対称モードを含んで変位を展開
- ・ 応力関数を同次解と特解の和で求める
- ・ 運動方程式にGalerkin法を適用
- ・ 式の展開にはMathematicaを利用

### 3. 主な結果

円筒シェルの諸元は  $L=0.2\text{m}$ ,  $R=0.1\text{m}$ ,  $h=0.247 \times 10^{-3}\text{m}$ ,  $E=71.02 \times 10^9\text{Pa}$ ,  $\rho=2796\text{kg/m}^3$ ,  $\nu=0.31$ . 励振するモードは  $n=6, m=1$  とする。解析にはAUTO[23]を用いた。

図1は23自由度を用いた励振モードの応答曲線である。外力の振幅は  $f_{1,n} = 0.0012h^2 \rho \omega_{1,n}^2$ ，減衰比は  $2\zeta_{1,k} = 0.001$  ( $\zeta_{j,k} = \zeta_{1,n} \omega_{j,k} / \omega_{1,n}$ ) で、 $\omega_{1,n} = 2\pi \times 564.2$  rad/s である。3自由度の結果は、漸軟特性が弱い、4自由度になると正解に向かってかなり収束する。

表1は23自由度解と次の8ケースとの誤差を示す。

- (1) without  $(3m, 3n)$  modes;
- (2) without  $(3m, 3n)$  and  $(3m, n)$  modes;
- (3) without  $(3m, 3n)$ ,  $(3m, n)$  and  $(m, 3n)$  modes;
- (4) without  $(3m, 3n)$ ,  $(3m, n)$ ,  $(m, 3n)$ , and  $(3m, 2n)$  modes;
- (5) without  $(3m, 3n)$ ,  $(3m, n)$ ,  $(m, 3n)$ ,  $(3m, 2n)$  and  $(m, 2n)$  modes;
- (6) without  $(3m, 3n)$ ,  $(3m, n)$ ,  $(m, 3n)$  and  $(5m, 0)$  modes;
- (7) without  $(3m, 3n)$ ,  $(3m, n)$ ,  $(m, 3n)$ , and from  $(3m, 0)$  to  $(5m, 0)$  modes;
- (8) without  $(3m, 3n)$ ,  $(3m, n)$ ,  $(m, 3n)$ , and from  $(m, 0)$  to  $(5m, 0)$  modes.

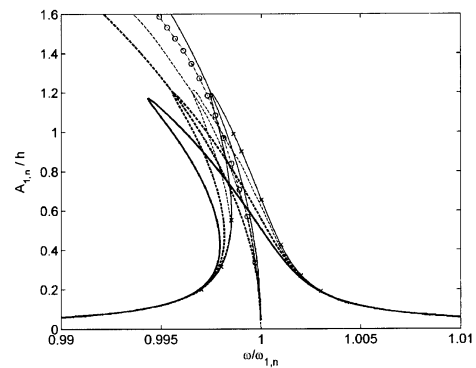


Fig. 1. Response–frequency curve. —, 23-dof model; —, 3-dof model [16]; - -, 4-dof model [26]; - o -, Ganapathi and Varadan [25]; - -, Chen and Babcock [15].

Table 1 Convergence test

Case	Error (%) time domain	Error (%) freq. domain
1	0.1	0.02
2	0.8	0.31
3	2	0.96
4	20.63	8.53
5	127	142
6	7.3	3.37
7	106	107
8	97	89

表中の時間誤差と周波数誤差は、それぞれ以下の式で求められる。式中で  $N=20000$  である。

$$100 \times \sum_{i=1}^N |w_k(\bar{x}, \bar{\theta}, t_i) - w_{23}(\bar{x}, \bar{\theta}, t_i)| / \sum_{i=1}^N |w_{23}(\bar{x}, \bar{\theta}, t_i)|,$$

$$100 \times \sum_{i=1}^N |FFT(w_k(\bar{x}, \bar{\theta}, t_i)) - FFT(w_{23}(\bar{x}, \bar{\theta}, t_i))| / \left| \sum_{i=1}^N FFT(w_{23}(\bar{x}, \bar{\theta}, t_i)) \right|,$$

図7は、定在波(a)と進行波(b)の様子を示す。進行波では、波は円周方向に伝わっている。

幾何学的なパラメータ  $h/R$  と  $L/R$  が非線形性に及ぼす影響をノーマルフォームの手法を用いて調べた。計算量の関係から、励振モード(1,6)と二つの軸対称モード(1,0)と(3,0)のみを用いる。非線形特性は3次非線形項の係数  $\gamma(h/R, L/R)$  で整理される。

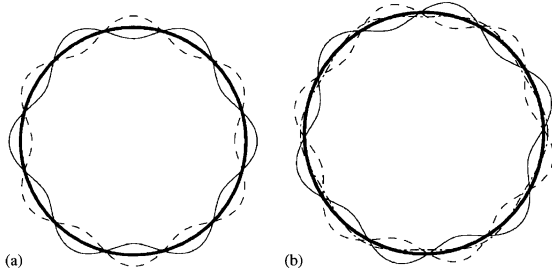


Fig. 7. Snapshots of the vibration shape: (a) without companion mode, (b) with companion mode: —,  $t=0$ ; --,  $t=\pi/(2\omega)$ ; -·-,  $t=\pi/\omega$

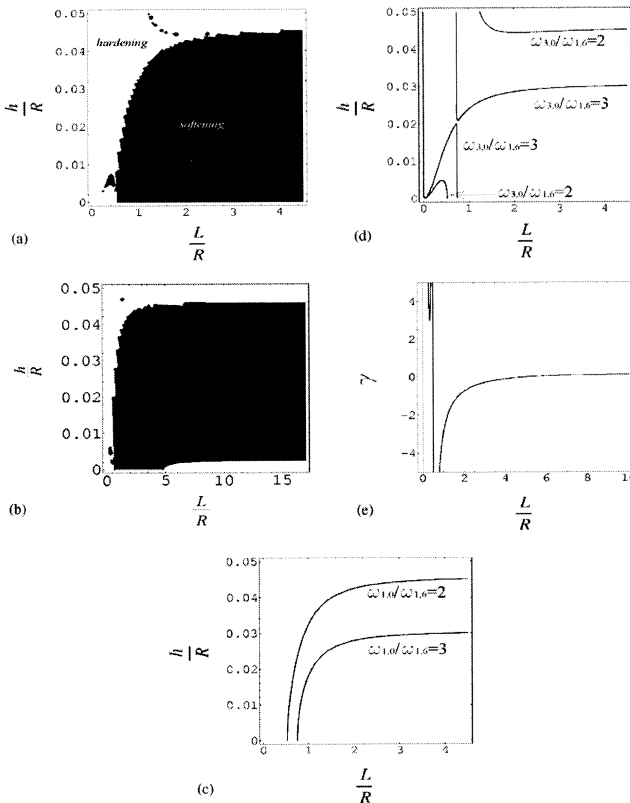


Fig. 8. Characterization of the non-linearity. (a,b) maps of different non-linear behaviour; (c,d) internal resonances, (e) non-linear coefficient for  $h/R = 0.001$ .

図8(a,b)の黒い部分は softening 領域であり、白い部分は hardening 領域を示す。  $L/R$  が小さく  $h/R$  が大きくなると hardening 特性を示すことがわかる。 hardening 領域のところどころには不規則に softening 領域が存在している。図8(a)の領域の主な境界は、内部共振と関係している。図8(c)は(1,6)と(1,0)モードの、図8(d)は(1,6)と(3,0)モードの 1:2 と 1:3 内部共振の発生条件を示す。図8(a)の不規則な softening 領域は、図8(d)より(1,6)と(3,0)モードの 1:2 と 1:3 内部共振によって生じていることがわかる。

抄録者所感

円筒シェルの非線形振動解析の精度を、解析で考慮した線形モードに関して詳細に調べており参考になった。また、softening 領域の主な境界が内部共振によって規定されることが興味深かった。しかし、解析的に解くためには平均値で規定される境界条件を用いなければならない点や、線形モードをベースとしていることから、精度には限界があるようにも思える。

参考文献

- [15] J.C. Chen, C.D. Babcock, Nonlinear vibration of cylindrical shells, AIAA J. 13 (7) (1975) 868–876.
- [16] M. Amabili, F. Pellicano, M.P. Païdoussis, Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid, J. Fluids Struct. 12 (7) (1998) 883–918.
- [21] M. Amabili, M.P. Païdoussis, Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid–structure interaction. Appl. Mech. Rev. (2003), submitted for publication.
- [25] M. Ganapathi, T.K. Varadan, Large amplitude vibrations of circular cylindrical shells, J. Sound Vib. 192 (1) (1996) 1–14.
- [26] M. Amabili, F. Pellicano, A.F. Vakakis, Nonlinear vibrations and multiple resonances of fluid filled circular shells; Part 1: equation of motion and numerical results, J. Vib. Acoustics 122 (1) (2000) 346–354.